正确解读布兰查德模型

周　方

2007 年 2 月

对布兰查德模型无可指摘，现解读如下:

（一）关于布兰查德模型的目标函数(40)

布兰查德模型是一个**‘无限不确定寿命’**型的模型。**‘无限不确定寿命’**并非说一个人永远不死，而是说一个人无论能活多长时间，仍终归会在某个时刻死亡，但何时死亡，则是不确定的。也就是说，一个在时刻t尚活着的人，其未来死亡时刻是不确定的，是一个**‘随机变量’**，记为ξ。而且，这个随机变量ξ的取值范围是(t,∞)，即$t<\xi<\infty$ 。

不难证明：布兰查德模型的（40）式中的广义积分$\int_t^\infty u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz$是收敛的，且有:

$$\int_t^\infty u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz=\int_t^\xi u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz$$

（ 证明详见本文的**附录 1**）

$\int_t^\xi u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz$ — **‘从时刻t存活到寿终时刻ξ’**的**‘余年’**内诸时刻z瞬时效用$u(c(z))$的贴现值$u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]$之总和。

对上面等式的两边取数学期望，得:

$$E\left[\int_t^\infty u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz\mid t\right]=E\left[\int_t^\xi u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz\right]$$

这样，一个人在作时刻t的消费决策时优化目标就是使下式最大化:

$$E\left[\int_t^\infty u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz\mid t\right]$$

这就是**布兰查德模型的公式**（40）。

[参见: 布兰查德:《宏观经济学》, 1992 年版, 第 127 页, 公式(40)]
上面等式右边的$E\left[\int_t^{\xi} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz\right]$中即出现了**随机变量**$\xi$!

用文字表述布兰查德模型的优化目标，实际上是:

“个人在任何时刻t作消费决策时，目标总是: 使**‘从时刻t存活到寿终时刻ξ’**的**‘余年’**(**‘时刻t后有生之年’**)内瞬时效用贴现和$\int_t^{\xi} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz$的**期望值**最大化 ”

从上可见，公式(40)中的**广义积分**$\int_t^{\infty} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz$实际上是**定积分**$\int_t^{\xi} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz$，后者显然是积分上限$\xi$(随机变量)的函数。可是，**贺菊煌先生**却不明白积分式$\int_t^{\infty} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz$的实际内容，就‘批判’布兰查德模型，指责公式(40)，说 :

《 式(40)中哪个变量是随机变量?其概率分布如何?没有清楚的说明。》 ;

《由于(40)中的随机变量及其概率分布不清楚，就很难弄清楚(40’)是怎样推出来的。布兰查德对此没有给出任何数学推理。》

(二)从布兰查德的(40)式可以直接推出(40’)式

其实，从(40)式**直接推出**(40’)式实际上是十分容易的。下面就来进行推导。

上面已指出: $\int_t^{\infty} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz = \int_t^{\xi} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz$

定积分$\int_t^{\xi} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz$是**积分上限**$\xi$(随机变量)的函数，它同时也是**‘余年$\xi-t$’**(随机变量)的函数，记为:

$$\int_t^{\xi} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz = g(\xi-t)$$

式中：$\xi-t$代表在时刻t活着的人的**‘余年’**（随机变量）。

对上面两个等式‘取数学期望’，得:

$$E\left[\int_t^{\infty}u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz\mid t\right]=E\left[\int_t^{\xi}u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz\right]=E[g(\xi-t)]$$

$g(\xi-t)$的数学期望是:

$$\begin{aligned}
E[g(\xi-t)]&=\int_0^{\infty}g(\tau)\bullet p\exp[-p\tau]d\tau\\
&=\int_t^{\infty}g(z-t)\bullet p\exp[-p(z-t)]dz\\
&=\int_t^{\infty}\{\int_t^{z}u(c(y))\exp[-\theta(y-t)]dy\}\bullet p\exp[-p(z-t)]dz\\
&=\int_t^{\infty}\{\int_t^{z}u(c(y))\exp[-\theta(y-t)]dy\}\bullet(-1)\bullet d(\exp[-p(z-t)])\\
&=-\exp[-p(z-t)]\bullet\{\int_t^{z}u(c(y))\exp[-\theta(y-t)]dy\}\Big|_t^{\infty}\\
&\quad+\int_t^{\infty}\exp[-p(z-t)]\bullet u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz\\
&=\int_t^{\infty}u(c(z))\exp[-(\theta+p)(z-t)]dz\\
&=\int_t^{\infty}\log(c(z))\exp[-(\theta+p)(z-t)]dz
\end{aligned}$$

最终得: $E\left[\int_t^{\infty}u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz\mid t\right]=\int_t^{\infty}\log(c(z))\exp[-(\theta+p)(z-t)]dz$

这样，就从**布兰查德的（40）式直接导出了（40’）式!!!**

[参见: 布兰查德:《宏观经济学》, 1992 年版, 第 127 页, 公式(40’)]

（三） 关于瞬时效用函数$u(c(x))$的诸项性质

布兰查德模型中有一段原文是:“如果死亡，效用就被假定为 0，如果活着，效用就是$u(c(z))$；我们进一步假设$u(\cdot)$是$\log c(z)$。”

[参见: 布兰查德:《宏观经济学》，1992 年版，第 127 页，]

应当指出，布兰查德已十分明确地指出：瞬时效用函数$u(c(z))$应是消费$c(z)$的**非负、凹形增函数**。[参见: 布兰查德:《宏观经济学》，1992 年版，第 43-44 页] 。

一个人或者‘**活着**’，或者‘**死亡**’；与之相对应，效用$u(c(z))$、消费$c(z)$、劳动收入$y(z)$或者‘>0’，或者‘$=0$’。所以，效用$u(c(z))$、消费$c(z)$、劳动收入$y(z)$在任何情况下都应为‘**非负**’，即：它们应是z的**非负函数**。

因此，可将上面这段布兰查德的原文解读为：《 如果**死亡**，就不获得效用$u(c(z))$，即$u(c(z))=0$；如果**活着**，就获得效用$u(c(z))$，即$u(c(z))=\log(c(z))>0$。》

这里，‘$u(c(z))=\log(c(z))>0$’ 意味着（在模型中）必有‘$c(z)>1$’之约束，它同时还指出：**“个人如果活着、消费不可为 1，也不可大于 0 小于 1”**。

为了保证$u(c(z))$有**非负**、**凹性**、**渐增**这三项性质，布兰查德‘假设$u(\cdot)$是$\log c(z)$’，是合理的，并无不妥之处。

然而，**贺菊煌先生**却未弄懂布兰查德的原意，遂主观臆断，‘批判’布兰查德模型的上述那段原文，说：

《 **……这段话，会产生这样荒谬的结果：“在时刻 z，个人如果活着、消费为 1，则效用为 0（=log(1)）；如果死亡，效用也为 0。如果活着时消费大于 0 小于 1，则效用为负值，还不如死了好（效用为 0）。”** 》

这是对布兰查德关于$u(c(z))$的三项性质所做假定的歪曲。

（四） 对跨时预算约束(44)的正确理解

$$\int_t^{\infty} c(z)R(t,z)dz = v(t) + \int_t^{\infty} y(z)R(t,z)dz \qquad (44)$$

不难证明:

$\int_t^{\infty} c(z)R(t,z)dz$ 是收敛的，且有: $\int_t^{\infty} c(z)R(t,z)dz = \int_t^{\xi} c(z)R(t,z)dz$

$\int_t^{\infty} y(z)R(t,z)dz$ 是收敛的，且有: $\int_t^{\infty} y(z)R(t,z)dz = \int_t^{\xi} y(z)R(t,z)dz$

（ 证明详见本文的**附录 2** ）

将它们代入（44）式，得:

$$\int_t^{\xi} c(z)R(t,z)dz = v(t) + \int_t^{\xi} y(z)R(t,z)dz \,, \quad (t < \xi < \infty)$$

然而，**贺菊煌先生**却‘批判’布兰查德模型的（44）式，说:

《 （44）只能是“预期从 t 到∞一直活着这种情况下的跨时预算约束”。也就是说,(44)只对于 t 时刻以后永远不死的情况成立。》

《 跨时预算约束（44）与目标函数（40）或（40’）在逻辑上不一致。这种不一致，是该模型的一个致命性缺陷。》

这是对公式（44）的**误解**。

其实，布兰查德模型的（44）式说明：公式（44）乃是**‘从时刻 t 存活到寿终时刻 ξ’**这种情况下的**跨时预算约束**，即公式（44）是对于**‘从时刻 t 存活到寿终时刻 ξ’** 这种情况成立。（44）式与（40）式[或（40’）式]都是对于**‘从时刻 t 存活到寿终时刻 ξ’**这种情况成立，因此，它们**在逻辑上是完全一致的**，它们构成一个完整的规划模型。

***************   ***************   ***************

附录 1

一个在时刻t尚活着的人，其未来死亡时刻是不确定的，是一个 ‘**随机变量**’，记为ξ。而且，这个随机变量ξ的取值范围是(t,∞)，即$t<\xi<\infty$ 。

按布兰查德模型的原意，有:

（1） $u(c(z))=\log(c(z))>0$，当$t\le z<\xi$（活着时);

$u(c(z))=0$，当$\xi\le z<\infty$（死亡后);

（2） 贴现因子$\exp[-\theta(z-t)]>0$， $z\in[t，\infty)$;

因此，有:

$u(c(z))\bullet\exp[-\theta(z-t)]=\log(c(z))\bullet\exp[-\theta(z-t)]>0$，当$t\le z<\xi$（活着时);

$u(c(z))\bullet\exp[-\theta(z-t)]=0$，当$\xi\le z<\infty$（死亡后);

记: $u(c(z))\bullet\exp[-\theta(z-t)]$＝$\Phi(z)$。$\Phi(z)$的图形示于图 1。

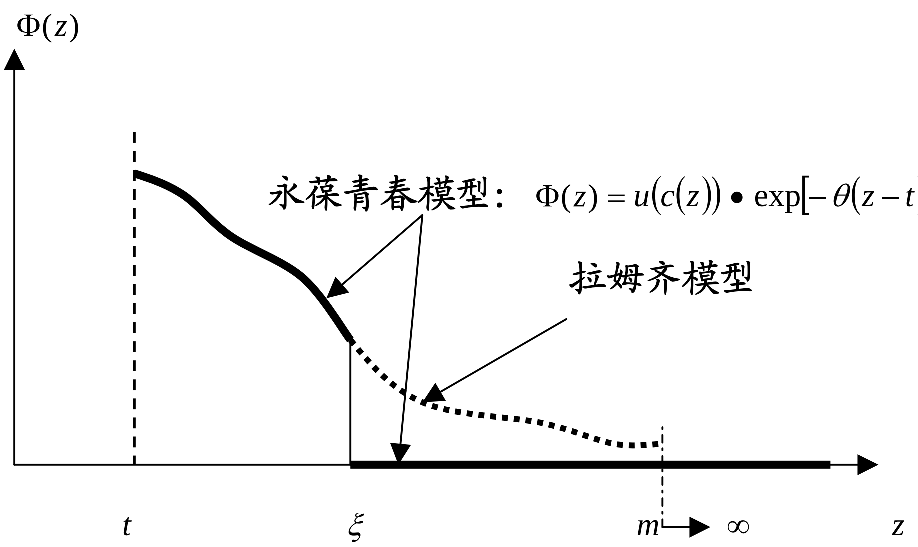

图 1 （$t<\xi<m<\infty$）

下面证明： “$\int_t^{\infty} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz = \int_t^{\xi} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz$ ”

参看图 1。对任意的 m（ $t<\xi<m<\infty$ ），函数 $\Phi(z)=u(c(z))\bullet\exp[-\theta(z-t)]$是区间 [t，m] 上，间断点为 $z=\xi$ 的**有界、分段连续函数**；因此，函数$\Phi(z)=u(c(z))\bullet\exp[-\theta(z-t)]$在区间 [t，m] 上为**黎曼可积**，即：**定积分**$\int_t^{m} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz$存在，因而下式成立：

$$\int_t^{m} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz = \int_t^{\xi} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz + \int_{\xi}^{m} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz$$

因为：当 $\xi \le z < \infty$（死亡后），$u(c(z))\bullet\ \exp[-\theta(z-t)] \equiv 0$，　故有：

$$\int_{\xi}^{m} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz = \int_{\xi}^{m} 0\bullet dz = 0$$

因此得：$\int_t^{m} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz = \int_t^{\xi} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz$，（ $t<\xi<m<\infty$ ）

极限值： $\lim\limits_{m\to\infty}\int_t^{m} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz = \int_t^{\xi} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz$。

而： $\lim\limits_{m\to\infty}\int_t^{m} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz \equiv \int_t^{\infty} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz$（**广义积分**）

故：**广义积分**$\int_t^{\infty} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz = \int_t^{\xi} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz$

附录 2

（1） $c(z)>1$及$y(z)>0$，当 $t\le z<\xi$（活着时）;

$c(z)=0$及$y(z)=0$，当 $\xi\le z<\infty$（死亡后）;

（2） 贴现因子$R(t,z)=\exp\{-\int_t^{z}[r(\mu)+p]d\mu\}>0$，　$z\in[t,\infty)$；

因此，有：

$$\begin{cases} c(z)R(t,z)>0 \text{及} y(z)R(t,z)>0\text{，当 } t\le z<\xi \text{（活着时）;} \\ c(z)R(t,z)=0 \text{及} y(z)R(t,z)=0\text{，当 } \xi\le z<\infty \text{（死亡后）;} \end{cases}$$

（A）**下面证明：** “$\int_t^{\infty} c(z)R(t,z)dz = \int_t^{\xi} c(z)R(t,z)dz$”

参看图 1。在图 1 中，用函数$c(z)R(t,z)$取代$u(c(z)) \bullet \exp[-\theta(z-t)]$，用 p（$t<\xi<p<\infty$）取代m（$t<\xi<m<\infty$），于是有：

对任意的p（$t<\xi<p<\infty$），函数$c(z)R(t,z)$是区间[t，p]上，间断点为$z=\xi$ 的**有界、分段连续函数**；因此，函数$c(z)R(t,z)$在区间[t，p]上为**黎曼可积**，即：**定积分**$\int_t^{p} c(z)R(t,z)dz$存在，因而下式成立：

$$\int_t^{p} c(z)R(t,z)dz = \int_t^{\xi} c(z)R(t,z)dz + \int_{\xi}^{p} c(z)R(t,z)dz$$

因为：当 $\xi \le z < \infty$（死亡后），$c(z)R(t,z)$ $\equiv 0$，故有：

$$\int_{\xi}^{p} c(z)R(t,z)dz = \int_{\xi}^{p} 0 \bullet dz = 0$$

因此得： $$\int_t^{p} c(z)R(t,z)dz = \int_t^{\xi} c(z)R(t,z)dz, \quad (t<\xi<p<\infty)$$

极限值： $$\lim_{p\to\infty}\int_t^{p} c(z)R(t,z)dz = \int_t^{\xi} c(z)R(t,z)dz$$

而： $$\lim_{p\to\infty}\int_t^{p} c(z)R(t,z)dz \equiv \int_t^{\infty} c(z)R(t,z)dz$$ （**广义积分**）

故： **广义积分** $\int_t^{\infty} c(z)R(t,z)dz = \int_t^{\xi} c(z)R(t,z)dz$

（B）**下面证明：** “$\int_t^{\infty} y(z)R(t,z)dz = \int_t^{\xi} y(z)R(t,z)dz$”

参看图 1。在图 1 中，用函数$y(z)R(t,z)$取代$u(c(z)) \bullet \exp[-\theta(z-t)]$，用$q$（$t<\xi<q<\infty$）取代$m$（$t<\xi<m<\infty$），于是有：

对任意的q（$t<\xi<q<\infty$），函数$y(z)R(t,z)$是区间[t，q]上，间断点为$z=\xi$的**有界、分段连续函数**；因此，函数$y(z)R(t,z)$在区间[t，q]上为**黎曼可积**，即：**定积分**

$\int_t^{q} y(z)R(t,z)dz$ 存在，因而下式成立：

$$\int_t^{q} y(z)R(t,z)dz = \int_t^{\xi} y(z)R(t,z)dz + \int_{\xi}^{q} y(z)R(t,z)dz$$

因为：当 $\xi \le z < \infty$（死亡后），$y(z)R(t,z)$ $\equiv 0$，故有：

$$\int_{\xi}^{q} y(z)R(t,z)dz = \int_{\xi}^{q} 0 \bullet dz = 0$$

因此得: $\int_{t}^{q} y(z)R(t,z)dz = \int_{t}^{\xi} y(z)R(t,z)dz$， （$t < \xi < q < \infty$）

极限值: $\lim_{q\to\infty}\int_{t}^{q} y(z)R(t,z)dz = \int_{t}^{\xi} y(z)R(t,z)dz$

而: $\lim_{q\to\infty}\int_{t}^{q} y(z)R(t,z)dz \equiv \int_{t}^{\infty} y(z)R(t,z)dz$ （**广义积分**）

故: **广义积分** $\int_{t}^{\infty} y(z)R(t,z)dz = \int_{t}^{\xi} y(z)R(t,z)dz$

*************** *************** ***************

评“我对布兰查德模型的理解”一文

周 方

2007 年 1 月 15 日

对于**沈利生先生**的《我对布兰查德模型的理解》一文（以下简称‘短文’），现评论如下。

学过概率论的人都知道，在概率论中‘**随机变量**’通常用希腊字母（或有时用大写拉丁字母）表示，而**随机变量**的‘**取值**’则通常用小写拉丁字母表示。在布兰查德的《宏观经济学》这样一部有很大影响力的经典教材里，想必布兰查德也是遵循概率论中这一约定俗成的规则，而不至于改用**小写** z 来表示**随机变量**的。

布兰查德模型是一个‘**无限不确定寿命**’型的模型。‘**无限不确定寿命**’并非说一个人永远不死，而是说一个人无论能活多长时间，仍终归会在某个时刻死亡，但何时死亡，则是不确定的。也就是说，一个在时刻t尚活着的人，其未来死亡时刻是不确定的，是一个‘**随**

机变量'。记该随机变量，即死亡时刻为ξ。而且，这个随机变量ξ的取值范围是(t,∞)，即$t<\xi<\infty$ 。“$\xi=z$”的意义是：在随机事件的一次试验结果中，这个随机变量ξ在其取值范围(t,∞)内取中了某个数值z。这个数值仅代表时间点在(t,∞)内所处的位置，因此，符号z在本质上不是变量，更不是一个随机变量，也不可被**'当作随机变量'**。符号z仅代表随机变量ξ的一个取值。

因此，无论是把 z**'当作随机变量'**，还是说：**'把 z 看作是随机变量也未尝不可'**，都是十分错误的。

另外，'短文'中还有下面这样一段精彩的**'叙述文'**：

《 为了求解永葆青春模型，需要去掉（40）式中的期望符号 E，即把个人余生的不确定性具体化。这是通过引入个人在时刻 z 活着的概率$\exp[-p(z-t)]$来实现的，即在（40）式的效用函数 u 上乘上此概率，有

$$\int_t^\infty u(c(z))\exp[-p(z-t)]\exp[-\theta(z-t)]dz=\int_t^\infty u(c(z))\exp[-(p+\theta)(z-t)]dz$$

注意，上式中不但去掉了（40）式中的期望符号 E，还同时去掉了条件（|t）。上式中未出现死亡概率是由于个人死亡后的消费为 0，效用也为 0，故省略了。》

这里需要指出：**'期望符号 E'**是概率论中一个'**符号**'，用以指示我们具体进行相应的数学演算；数学公式中的**'期望符号 E'**是不可以**'用一句话'说去就把他去掉的**。这种不进行演算的“数学推导”，简直不可思议！而且，答案也不是可以凭主观臆想直接写出来的，而必须通过严格的数学推导得出来。因此，这种评说式的**'叙述'**根本就不是数学论证，也就毫无说服力！！！

总之，既不可像**贺菊煌先生**那样在布兰查德模型中强行‘**添加**’什么‘**假定**’，在（40）式的**被积函数**中竟然主观随意地塞进一个什么“**随机变量序列** H(z)”，也不可像**沈利生先生**那样，极不严肃地用一句话“**在（40）式的效用函数 u 上乘上此概率**”，从而一下子就“**去掉了（40）式中的期望符号 E**”。

*************** ***************

其实，通过不复杂的数学推导，从（40）式直接推出（40’）式实际上是十分容易的。下面就来进行推导:

不难证明：布兰查德模型的（40）式中的**广义积分** $\int_t^{\infty} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz$ 是收敛的，且有:

$$\text{广义积分}\int_t^{\infty} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz = \int_t^{\xi} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz$$

（ 证明详见本文的**附录 A** ）

$\int_t^{\xi} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz$ —‘**从时刻 t 存活到寿终时刻 ξ**’的‘**余年**’内诸时刻 z 瞬时效用 $u(c(z))$ 的贴现值 $u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]$ 之总和。

对上面等式的两边取数学期望，得:

$$E\left[\int_t^{\infty} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz \mid t\right] = E\left[\int_t^{\xi} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz\right]$$

这样，一个人在作时刻 t 的消费决策时优化目标就是使下式最大化:

$$E\left[\int_t^{\infty} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz \mid t\right]$$

这就是**布兰查德模型的公式**（40）。

[参见: 布兰查德:《宏观经济学》, 1992 年版, 第 127 页, 公式(40)]

上面等式右边的 $E\left[\int_t^{\xi} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz\right]$ 中即出现了**随机变量** ξ !

用文字表述布兰查德模型的优化目标，就是:

“一个人在作时刻t的消费决策时，目标就是使**‘从时刻t存活到寿终时刻ξ’**的**‘余年’**内诸时刻z瞬时效用$u(c(z))$的贴现值$u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]$之总和的**期望值**最大化”

从上可见，公式（40）中的**广义积分**$\int_t^{\infty}u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz$实际上是**定积分**$\int_t^{\xi}u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz$，后者显然是积分上限$\xi$（随机变量）的函数，它同时也是**‘余年$\xi-t$’**（随机变量）的函数，记为:

$$\int_t^{\xi}u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz=g(\xi-t)$$

式中：$\xi-t$代表在时刻t活着的人的**‘余年’**（随机变量）。

对上面两个等式‘取数学期望’，得:

$$E\left[\int_t^{\infty}u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz\mid t\right]=E\left[\int_t^{\xi}u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz\right]=E[g(\xi-t)]$$

$g(\xi-t)$的数学期望是:

$$\begin{aligned}
E[g(\xi-t)]&=\int_0^{\infty}g(\tau)\bullet p\exp[-p\tau]d\tau\\
&=\int_t^{\infty}\{\int_t^{z}u(c(y))\exp[-\theta(y-t)]dy\}\bullet p\exp[-p(z-t)]dz\\
&=\int_t^{\infty}\{\int_t^{z}u(c(y))\exp[-\theta(y-t)]dy\}\bullet(-1)\bullet d(\exp[-p(z-t)])\\
&=-\exp[-p(z-t)]\bullet\{\int_t^{z}u(c(y))\exp[-\theta(y-t)]dy\}\Big|_t^{\infty}\\
&\quad+\int_t^{\infty}\exp[-p(z-t)]\bullet u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz\\
&=\int_t^{\infty}u(c(z))\exp[-(\theta+p)(z-t)]dz\\
&=\int_t^{\infty}\log(c(z))\exp[-(\theta+p)(z-t)]dz
\end{aligned}$$

最终得：$E\left[\int_t^{\infty}u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz\mid t\right]=\int_t^{\infty}\log(c(z))\exp[-(\theta+p)(z-t)]dz$

这样，就从**布兰查德的（40）式直接导出了（40’）式!!!**

[参见: 布兰查德:《宏观经济学》, 1992 年版, 第 127 页, 公式(40’)]

附录 A

一个在时刻t尚活着的人，其未来死亡时刻是不确定的，是一个‘**随机变量**’，记为ξ。而且，这个随机变量ξ的取值范围是(t,∞)，即$t<\xi<\infty$ 。

按布兰查德模型的原意，有:

（1） $u(c(z))=\log(c(z))>0$，当$t\le z<\xi$（活着时）;

$u(c(z))=0$，当$\xi\le z<\infty$（死亡后）;

（2） 贴现因子$\exp[-\theta(z-t)]>0$， $z\in[t，\infty)$；

因此，有:

$u(c(z))\bullet\exp[-\theta(z-t)]=\log(c(z))\bullet\exp[-\theta(z-t)]>0$，当$t\le z<\xi$（活着时）;

$u(c(z))\bullet\exp[-\theta(z-t)]=0$，当$\xi\le z<\infty$（死亡后）;

记: $u(c(z))\bullet\exp[-\theta(z-t)]=\Phi(z)$。$\Phi(z)$的图形示于下图。

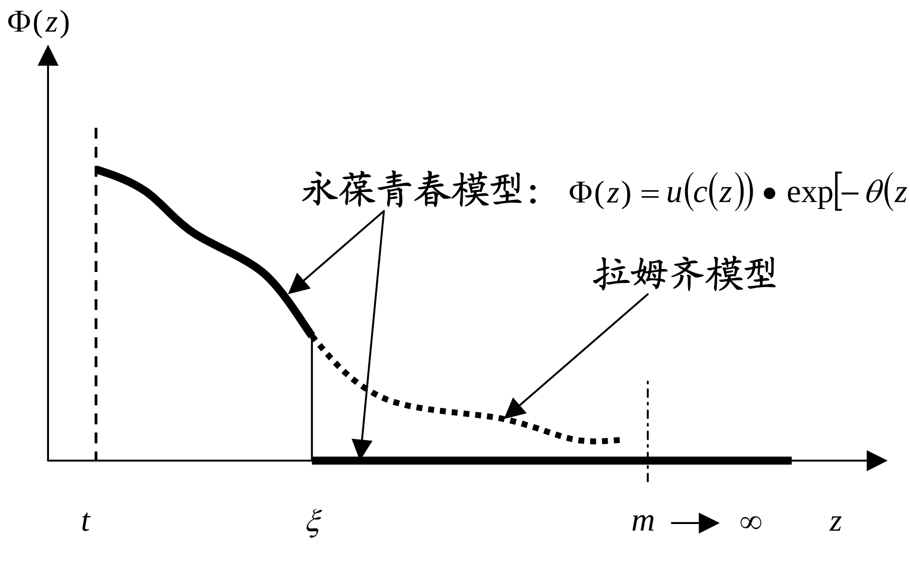

图 1　　（$t<\xi<m<\infty$）

下面证明： “$\int_t^{\infty} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz = \int_t^{\xi} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz$ ”

参看图1。对任意的 m（$t<\xi<m<\infty$），函数 $\Phi(z)=u(c(z))\bullet\exp[-\theta(z-t)]$ 是区间[t，m]上，间断点为 $z=\xi$ 的**有界、分段连续函数**；因此，函数 $\Phi(z)=u(c(z))\bullet\exp[-\theta(z-t)]$ 在区间[t，m]上为**黎曼可积**，即：**定积分** $\int_t^{m} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz$ 存在，因而下式成立：

$$\int_t^{m} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz = \int_t^{\xi} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz + \int_{\xi}^{m} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz$$

因为：当 $\xi\le z<\infty$（死亡后），$u(c(z))\bullet\exp[-\theta(z-t)]\equiv 0$，故有：

$$\int_{\xi}^{m} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz = \int_{\xi}^{m} 0\bullet dz = 0$$

因此得：$\int_t^{m} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz = \int_t^{\xi} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz$，（$t<\xi<m<\infty$）

极限值： $\lim\limits_{m\to\infty}\int_t^{m} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz = \int_t^{\xi} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz$。

而：$\lim\limits_{m\to\infty}\int_t^{m} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz \equiv \int_t^{\infty} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz$ （**广义积分**）

故：**广义积分** $\int_t^{\infty} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz = \int_t^{\xi} u(c(z))\exp[-\theta(z-t)]dz$